数理解析研究所講究録
173巻 1973年 11-20

撞球問題について

名大 理　　久保 泉

§1. はじめに

凡そ，百年前，Boltzmann，Maxwell 等は，古典力学の考察から熱学的現象を説明しようという大胆な試みを企てた。彼等は，非常に多くの粒子系における物理量のある種の平均量が熱学的量になることを主張した。その"平均"の意味付に関連して，一つの仮説が提唱された。後には，エルゴード仮説として定式化されるように，特殊な系を除けば，"エネルギー曲面上の函数の時間平均は，Liouvilli の不変測度による平均に等しい"という主張であった。Liouvilli の不変測度のもう一つ別の側面である，Poincaré の"再帰定理"が，天体力学の安定性の研究に関連して，見出され（丹羽氏の項をも参照されたい），暫くのちに，Zermelo によって，Boltzmann の理論への反証として，それが使われた。このようにして，エルゴード仮説と再帰定理が前世紀末から，

今世紀へかけて数理物理の興味ある対象として登場した。再帰定理は，Caratheodory等によって，有限測度空間上の保測変換に対して証明され一応の解決を得たが，エルゴード仮説の問題は，Weylの1914年頃の研究を除いて，1930年代まで，見るべき進展がなかった。1931年Birkhoffの個別エルゴード定理が発表されると，Koopman, Hopf, Neumann, Wintner, Khintchine, Seidel, Hedlund等の研究が百花斉放と咲いた。この時期の研究者は，一気に，エルゴード仮説の証明が出来ると勇躍したと想像される。しかし，本質的な結果は，Birkhoffの個別エルゴード定理，Neumannのスペクトル定理，エルゴード性と計量的可遷性の同値定理の三つに要約され，重要な例として，エルゴード性が示されたのは，Seidelのパイこね変換，Hedlund＝Hopfの定負曲率空間の測地的flow，Hopfの負曲率空間の測地的flowのエルゴード性であった。本来の目的である多粒子系のエルゴード性を示すのには，まだ遠い結果にみえるが，HedlundとHopfは，非常に重要な概念と手段に到達していた。それはtransversal foliationを使うことであるが，30年後に，Anosov＝SinaiによってC-system（Anosov system）として一般化，成功するまで生かされなかった。事実，Sinaiの撞球問題のエルゴード性を証明する

ためには，１９４０年までに得られた結果が必要にしてかつ充分である。

さて，謂ゆるエルゴード理論と呼ばれる分野の研究において，エルゴード仮説を正面から取り上げた研究は，１９６３年の Sinai まで跡絶えるが，途中１９５０年代に，Kolmogorov が，エントロピーと K-system の概念を導入したことと，Gelfand = Fomin が定負曲率空間の測地的 flow のスペクトルが σ-ルベーグであることを示したことは注目されてよい。６０年代に入ると，Sinai が，中心力ポテンシャルをもつ，多粒子系が，拡大及び縮小する transversal foliation をもつことに気づき，そのような系のエルゴード性を主張した（実際に完全な証明は１９７０年の Sinai の撞球問題だけである）。一方，Sinai は，transversal foliation をもつ系において，エルゴード性を証明する一般論を与えると同時に，Anosov と共に transversal foliation をもつ系として，C-system の定義を与えた。　C-system の研究には，エルゴード理論の立場からだけでなく，確率論の立場からも興味深いものがある。　ついに，１９７０年，二次元トーラス上の二つの円板の運動が，撞球問題と彼が呼ぶ系に帰着されることと，撞球問題のエルゴード性を示した Sinai は，本来のエルゴード仮説に挑戦して，成功した二人目の研究者となった。

§2. Transversal foliation とエルゴード性.

簡単に Hedlund-Hopf-Sinai の方法を解説しよう。まず Birkhoff の個別エルゴード定理から始める。$(X, \mathcal{B}, \mu)$ を全測度1の測度空間, T を1対1, onto, 両可測 (i.e. $T\mathcal{B} = T^{-1}\mathcal{B} = \mathcal{B}$), 保測 (i.e. $\mu(A) = \mu(TA)$, $A \in \mathcal{B}$) な X 上の変換とする。

定理 1 (Birkhoff) 任意の $f \in L^1(\mu)$ に対して, 二つの極限; $\bar{f}^{+}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^{k}x)$, $\bar{f}^{-}(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^{-k}x)$ が, 殆んど全ての x に対して存在し, $\bar{f}^{+}(x) = \bar{f}^{-}(x)$ a.e.

この定理は, 保測な変換の系 $\{S_t; -\infty < t < \infty\}$ が, $S_t S_s = S_{t+s}$ を充し, 写像 $(t, x) \to S_t x$ が可測なとき $\{S_t\}$ を flow と呼ぶが, flow に対して, 和を t に関する積分に置代えても成立する。

さて, Sinai は可測な fibre 構造の概念を与えた。 X を多様体とし, U を可測な部分集合, ξ は U の可測分割で各要素 C_ξ は X における区分的に滑らかな k-次元開部分多様体であり k 次元開球と同相, 可測な正函数 $p_\xi(x)$ が存在して

$$\mu(A \mid C_\xi) = \int_{A \cap C_\xi} p_\xi(y)\, d\sigma_{C_\xi}(y)$$

但し, σ_{C_ξ} は, C_ξ の metric ρ_{C_ξ} から導かれる体積要素, と表わされるとき, ξ は U における局所的な可測 fibre 構造と

呼ぶ。 大雑把に言って、このような可算ケの(U_ι, ξ_ι)があって、$\{U_\iota\}$が$\mathfrak{B}$を生成しており、$U_{\iota_1} \cap U_{\iota_2} \ni x$ に対して $C_{\xi_{\iota_1}(x)} \cap U_{\iota_2} = C_{\xi_{\iota_2}(x)} \cap U_{\iota_1}$ が成立し、k-次元の区分的に滑らかな閉部分多様体のとき、可測な fibre 構造$\mathfrak{Z}$が与えられたという。 $\mathfrak{Z}$は空間Xの fibre Γへの分割を定める。

X上の保測変換Tの transversal fibre $\mathfrak{Z}$とは、可測 fibre 構造$\mathfrak{Z}$の各 fibre Γに対し、$T^{-1}\Gamma$が再び$\mathfrak{Z}$の fibre であるときに言う。 Γ上の正則な点xに於て、Γの単位接ベクトルlに対し、l方向長さsの曲線γをとり、$T^{-1}\gamma$の長さをs'とする。 $\lim_{s \to 0} \frac{s'}{s} \equiv \lambda_l(x)$ とおき、$\lambda_l(x) > 1 \ {}^\forall x \in X$ ならば、$\mathfrak{Z}$は拡大していると言う、$\lambda_l(x) < 1 \ {}^\forall x \in X$ ならば縮少していると呼ぶ。

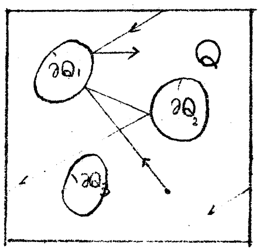
このような$\mathfrak{Z}$とTのエルゴード性の関係を説明しよう。 $f(x)$をXの一様連続な函数とする。 $\mathfrak{Z}$が拡大するならば、Γの任意の二点 x, y に対して、xとyを結ぶΓ上の曲線γを考えれば、$T^n\gamma$の長さは $n \to \infty$ のとき 0 に収束する。 fの一様連続性から、$f(T^n x) - f(T^n y) \to 0$, $n \to \infty$、であるから、Birkhoff の個別エルゴード定理より、

定理 2. $\mathfrak{Z}$が拡大すれば、$\bar{f}^+(x)$ は各Γ上で定数であり、縮小すれば、$\bar{f}^-(x)$ は各Γ上で定数である。

この定理から，例えば，k次元の縮小する$Z^{(c)}$と，l次元の拡大する$Z^{(e)}$が与えられ，$l+k=\dim X$ であり，局所的に，$Z^{(c)}$と$Z^{(e)}$が測度空間に適合した座標系を与得るならば，$\bar{f}^{+}(x)=\bar{f}^{-}(x)$ はそのような近傍で定数$(a.e.\,\mu)$になり，ほぼTがエルゴード的になる条件を与えている。

C-systemにおいては，拡大及び縮小するtransversal fibreが存在して，上のような事実が成立しエルゴード的になる。

§3. Sinaiの撞球問題



左図のように，二次元トーラス内の連結領域Qがあって，その境界∂Qは，滑らかで凸な閉曲線$\partial Q_1, \partial Q_2, \cdots, \partial Q_s$から成っているとする。$Q$の内部にある単位質量をもつ質点が，速さ1で慣性運動をして，壁∂Qで弾性反射をしている系を考える。位置q，速度p $(\|p\|=1)$，から出発して，時刻t後の位置を(q_t, p_t)とするとき，

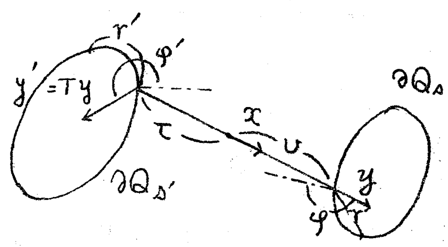
$$S_t(q, p) \equiv (q_t, p_t)$$

でエネルギー曲面M上の保測変換群$\{S_t\}$を定義する。問題は$\{S_t\}$がエルゴード的かということである。

$\{S_t\}$に関して，拡大及び縮小する一次元の可測なtransversal *foliation* を構成しよう。 負曲率空間の測地的flowに対して与えられている Hopf の一般的構成法に従えば次のようにすればよい。 π を M から Q への射影, $\pi(q,p)=q$ とする。各 $x\in M$ に対して,

$$\Gamma^{(c)}(x)\equiv\lim_{t\to\infty} S_t\pi^{-1}\circ\pi(S_{-t}x)\ ,\ \Gamma^{(e)}(x)\equiv\lim_{t\to-\infty} S_t\pi^{-1}\circ\pi(S_{-t}x)$$

が x を通る縮小並に拡大する foliation である。 滑らかな系で上の極限が x の近傍で自然な意味をもち, かつ存在することは明らかだが, 我々の系は特異性をもっているために自明ではない。 我々は次のように考えた方がより有効である。 まず, M は次のような *fibre bundle* 構造をもっていることに注意しよう。 $M_1\equiv\{x\,;$ 入射ベクトル, $x\in\pi^{-1}(\partial Q)\}$.



M_1 の点 y は, $\pi(y)\in\partial Q_s$, $\pi(y)$における内向法線となす角 φ, ∂Q_s上の定点から弧長 r とすると (s,r,φ) によって座標表示される。 $x\in M$ に対して,

$$\upsilon(x)\equiv\inf\{t\geq0\,;\pi(S_tx)\in\partial Q\},\quad \tau(x)\equiv\sup\{t<0\,;\pi(S_tx)\in\partial Q\}$$

と定義すれば, x は (s,r,φ,υ) で座標表示される。

$y\in M_1$ に対して, $Ty\equiv S_{\tau(y)-0}\,y$ で, M_1 上の変換T を定義すれば, $\{S_t\}$ は, υ-座標の *shift* と T によって記述される。 更に $\{S_t\}$ がエルゴード的である為には, T が

エルゴード的であることが必要十分である。

従って，Tを調べれば十分であるが，もっと都合のよいことには，Tのtransversal fibreを構成すれば，$\{S_t\}$のtransversal fibreも構成出来る。構成の準備として，次のLemmaを述る。

Lemma 1. γはM_1上の滑らかな曲線，T^{-1}がγ上で連続．$\gamma_1 \equiv T^{-1}\gamma$，$(r_1, \varphi_1) = T^{-1}(r, \varphi)$ $(r, \varphi) \in \gamma$と記せば

(イ) $$\frac{d\varphi}{dr} = -k(r) - \cfrac{\cos\varphi}{\tau(r_1, \varphi_1) - \cfrac{\cos\varphi_1}{\frac{d\varphi_1}{dr_1} - k(r_1)}}$$

(ロ) $$\frac{d\varphi}{d\varphi_1} = \left[\frac{k(r)}{\cos\varphi}\left(\cos\varphi_1 + \tau(r_1, \varphi_1)k(r_1)\right) + k(r_1)\right]\frac{dr_1}{d\varphi_1} - \left[1 + \frac{\tau(r_1, \varphi_1)k(r)}{\cos\varphi}\right]$$

(ハ) $$\frac{dr_1}{dr} = -\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1}\left[1 + \frac{\tau(r_1, \varphi_1)}{\cos\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dr} + k(r)\right)\right]$$

但し，s-座標は省略．$k(r)$は$r \in \partial Q$における∂Qの曲率．

集合Sを$S \equiv \{(r, \varphi) ; \varphi = \frac{\pi}{2}$ or $\frac{3}{2}\pi\}$とおく，$S \cup TS$及び$S \cup T^{-1}S$は高々可算ヶの曲線からなり，M_1を連結部分$\{X_j^{(c)}\}$，$\{X_j^{(e)}\}$に分割し，各$X_j^{(c)}$ではT^{-1}が滑らか，$X_j^{(e)}$上ではTが滑らか。

$d(x)$をxから$S \cup T^{-1}S$までの距離とする．$\eta = \min k(r) \cdot \min|\tau|$とおき$M_1$上の滑らかな曲線$\gamma$に対し$\theta(\gamma)$を$\varphi$-方向の全変動，$\rho(\gamma)$を$r$-方向の全変動とすると次のことが成立する。

(1°) $\log d(x)$は可積分

(2°) $D(x) \equiv C_2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2(1+\eta)^{-i}}{d(T^{-i}x)} < \infty$ a.e. μ，$C_2 = \left(1 + \frac{1}{(\min k(r))^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(3°) γ が減少曲線，$x \in \gamma$，$\theta(\gamma) \le \frac{1}{2C_2} d(x)$ ならば，

$$d(y) \le \frac{1}{2} d(x), \quad y \in \gamma, \quad \theta(T\gamma) \ge (1+\eta)\theta(\gamma)$$

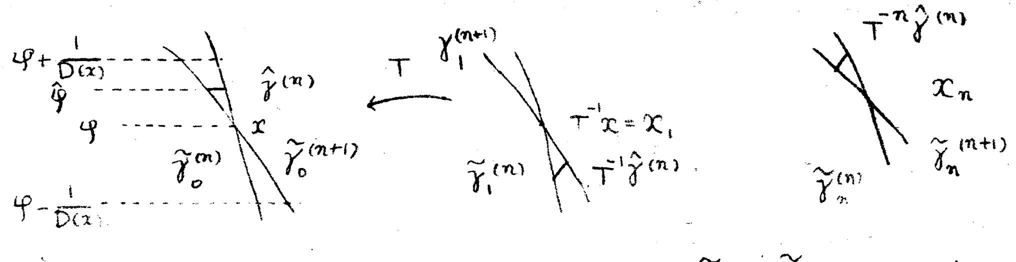
であり，γ 上で T が滑らか。

$x_n \equiv T^{-n} x$ を通る滑らかな曲線 $\gamma_n^{(n)}$ をとり勾配は $-(\min k(r))^{-1}$ 以下にする。曲線 $\tilde{\gamma}_i^{(n)} \subset T^{n-i}\gamma_n^{(n)}$ を次のように順次採る。

$$\theta(\tilde{\gamma}_n^{(n)}) = \frac{1}{2C_2} d(x_n), \quad x_n \in \tilde{\gamma}_n^{(n)}$$

$$\theta(\tilde{\gamma}_{i-1}^{(n)}) = \min\left(\frac{1}{2C_2} d(x_{i-1}), (1+\eta)\theta(\tilde{\gamma}_i^{(n)})\right), \quad x_{i-1} \in \tilde{\gamma}_{i-1}^{(n)} \subset T\tilde{\gamma}_i^{(n)}$$

このとき，(2°) と (3°) から，$\theta(\tilde{\gamma}_0^{(n)}) \ge \frac{1}{D(x)} > 0$ が得られ，また T^{-n} は $\tilde{\gamma}_0^{(n)}$ 上で滑らかになることが分かる。この $\tilde{\gamma}_0^{(n)}$ が $n \to \infty$ のとき区間 $[\varphi - \frac{1}{D(x)}, \varphi + \frac{1}{D(x)}]$ である $\tilde{\gamma}_0$ に一様収束する。何故なら，$\hat{\varphi}$ をこの区間からとると，高さ $\hat{\varphi}$ の水平線が $\tilde{\gamma}_0^{(n)}$ と $\tilde{\gamma}_0^{(n+1)}$ によって切りとられる線分 $\hat{\gamma}^{(n)}$ に対し，Lemma 1 (ハ) より，$\rho(\hat{\gamma}^{(n)}) \le \frac{(1+\eta)^{-n}}{|\cos\hat{\varphi}|} \rho(T^{-n}\hat{\gamma}^{(n)}) \le \frac{const\,(1+\eta)^{-n}}{|\cos\hat{\varphi}|}$ が得られる。



構成の仕方から，x，$D(x) < \infty$，に対し $\tilde{\gamma}_0 = \tilde{\gamma}_0(x)$ が一意に決まり，$y \in \tilde{\gamma}_0(x)$ に対しては，$\tilde{\gamma}_0(y)$ と $\tilde{\gamma}_0(x)$ が y の近傍で一致し，$T^{-1}\tilde{\gamma}_0(x) \subset \tilde{\gamma}_0(T^{-1}x)$ が成立することは明らかである。
$\Gamma^{(c)}(x) \equiv \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n \tilde{\gamma}_0(T^{-n}x)$ が x を通る transversal fibre である。

$\Gamma^{(c)}(x)$ の x を含む連結成分を $\gamma^{(c)}(x)$ と記す。$\gamma^{(c)}(x)$ の方程式 $\varphi=\varphi(r)$ は，$\dfrac{d\varphi}{dr}=-K^{(c)}(r,\varphi)\cos\varphi+k(r)$ を充す。但し，

$$K^{(c)}(r,\varphi)\equiv\frac{2k(r)}{\cos\varphi}+\frac{1\,|}{|\,\tau(r_1,\varphi_1)}+\cdots+\frac{1\,|}{|\,2k(r_n)/\cos\varphi_n}+\frac{1\,|}{|\,\tau(r_{n+1},\varphi_{n+1})}+\cdots.$$

同様に拡大する transversal fibre $\Gamma^{(e)}(x)$, $\gamma^{(e)}(x)$ が構成出来て，§2で述べたような性質をもっていて，Tがエルゴード的であることがわかる。$\{S_t\}$ の foliation の構成は，$\tilde{x}=(\tilde{r},\tilde{\varphi},\tilde{v})\in M$ に対し，$\gamma^{(c)}(x)$, $x=(\tilde{r},\tilde{\varphi})$, の方程式を $\varphi=\psi^{(c)}(r)$ とすると，

$$\varphi=\psi^{(c)}(r),\qquad v=\tilde{v}-\int_{\tilde{r}}^{r}\sin\psi^{(c)}(r)\,dr$$

なる方程式で与えられるM上の曲線を $\tilde{\gamma}(\tilde{x})$ とおき，$\tilde{\Gamma}^{(e)}(\tilde{x})\equiv\bigcup_t S_{-t}\tilde{\gamma}^{(e)}(S_t\tilde{x})$ とおくことにより得られる。縮小する transversal foliation $\tilde{\Gamma}^{(c)}(\tilde{x})$ も全く同じ方法で $\gamma^{(e)}(x)$ から得られる。

定理 3.　Sinai の撞球問題はエルゴード的である。また，それは拡大及び縮小する transversal foliation をもつ。

さらに，エルゴード理論的に興味ある事実として，$\{S_t\}$ 及びTがK-system であること，有限エントロピーの generator をもつこと等が言える。

最後になったが，Liouvilli 測度 μ は $d\mu=\text{const}\cos\varphi\,d\varphi\,dr\,dv$ であること，μ から自然に定まるTの不変測度 ν は，$d\nu=\text{const}.\cos\varphi\,d\varphi\,dr$ であることを注意しておく。